

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**Varietà
di Segre e di Veronese**
Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Monica Idà

Presentata da:
Giacomo Nanni

Sessione
Anno Accademico
2019-2020

Introduzione

L'intento di questa tesi è presentare alcuni esempi classici di varietà algebriche proiettive di $\mathbb{P}^n(K)$ dove K è un campo algebricamente chiuso.

Il primo capitolo richiama alcuni risultati preliminari.

In particolare, la seconda sezione introduce una classe di spazi topologici, gli spazi noetheriani, fornendo qualche risultato generale e la terza richiama la topologia di Zariski in \mathbb{A}^n , con lo scopo di poter evidenziare in seguito le relazioni con la topologia di Zariski in \mathbb{P}^n , e la corrispondenza stabilita tramite il Nullstellensatz(1.3.4) tra ideali radicali e insiemi algebrici affini.

Nel secondo capitolo invece si introducono degli anelli graduati. La prima sezione si concentra sugli ideali omogenei (def. 2.1.4) mentre la seconda su come si comportano certi omomorfismi d'anelli dall'anello dei polinomi $K[x_0, \dots, x_n]$ a un anello graduato che contenga K .

Il capitolo 3 invece comincia introducendo la topologia di Zariski di \mathbb{P}^n per poi stabilire la corrispondenza tra insiemi algebrici proiettivi e ideali omogenei radicali di $K[x_0, \dots, x_n]$. Nella seconda parte ricaviamo, studiando il rapporto tra insiemi algebrici proiettivi e coni affini (3.2.1), alcuni risultati che riflettono il comportamento degli insiemi algebrici affini, tra cui il Nullstellensatz proiettivo.

Infine nella terza sezione si presenta un esempio di mappa continua tra spazi proiettivi.

Il capitolo 4 è dedicato alla costruzione di esempi di varietà proiettive. Si apre con un risultato preliminare che fornisce un metodo per costruire varietà. Questo viene quindi applicato per presentare l'esempio delle varietà

di Segre, che si ottengono immergendo il prodotto cartesiano di due spazi proiettivi $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ in uno spazio proiettivo \mathbb{P}^N di dimensione opportuna ($N = (r + 1)(s + 1) - 1$). Sfruttando nuovamente lo stesso risultato si costruiscono nella terza sezione le varietà di Veronese e si mostra che sono immersioni di uno spazio proiettivo in un altro.

L'ultima sezione si concentra su un esempio più specifico di varietà di Veronese: la cubica gobba di \mathbb{P}^3 .

Indice

| | |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduzione | i |
| 1 Richiami e preliminari | 1 |
| 1.1 Richiami sui campi e i polinomi | 1 |
| 1.2 Cenni sugli spazi topologici noetheriani | 2 |
| 1.3 La topologia di Zariski su \mathbb{A}^n | 5 |
| 2 Anelli graduati | 9 |
| 2.1 Anelli graduati e ideali omogenei | 9 |
| 2.2 Morfismi dall'anello dei polinomi in un anello graduato | 14 |
| 3 Insiemi algebrici proiettivi e ideali omogenei | 17 |
| 3.1 Topologia di Zariski su \mathbb{P}^n | 17 |
| 3.2 La corrispondenza insiemi algebrici-ideali omogenei | 21 |
| 3.3 Un esempio di mappa continua su \mathbb{P}^n | 25 |
| 4 Esempi di varietà proiettive | 27 |
| 4.1 Un risultato preliminare | 27 |
| 4.2 La varietà di Segre | 30 |
| 4.3 La varietà di Veronese | 32 |
| 4.4 La cubica gobba di \mathbb{P}^3 | 35 |

Capitolo 1

Richiami e preliminari

1.1 Richiami sui campi e i polinomi

Dato un campo K , diremo $K[x]$ l'anello dei polinomi in x a coefficienti in K e $K[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate x_1, \dots, x_n a coefficienti in K . Possiamo associare a un polinomio in n indeterminate una funzione da K^n in K :

$$\begin{aligned} K[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow K^{K^n} \\ f &\longmapsto \tilde{f} : K^n \longrightarrow K \\ &(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

In generale questo omomorfismo non è iniettivo. Tuttavia per campi infiniti sì.

Teorema 1.1.1

Sia K campo infinito. Allora $f \mapsto \tilde{f}$ è iniettiva

Dimostrazione. Ragionando per $n=1$, $\tilde{f} = 0 \implies f(x) = 0, \forall x \in K$ cioè f ha $|K| = \infty$ radici, ma se fosse $f \neq 0$ allora ne avrebbe al più $\deg f \in \mathbb{N}$. Pertanto $f = 0$. Per induzione si verifica che questo vale per $n \in \mathbb{N}$. Infatti, sia $f \in K[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = K[x_1, \dots, x_n][x_{n+1}]$ allora $f = \sum_0^d g_i x_{n+1}^i, g_i \in K[x_1, \dots, x_n]$

$$\tilde{f} = 0 \iff \forall (a_1, \dots, a_{n+1}) \in K^{n+1}, 0 = f(a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_0^d \tilde{g}_i(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}^d \iff$$

$$\forall (a_1, \dots, a_{n+1}) \in K^{n+1}, \forall a_{n+1} \in K, \sum_0^d \tilde{g}_i(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}^d = 0 \iff g_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall i \in 1, \dots, d$$

da cui per ipotesi induttiva $g_i = 0, \forall i \in 0, \dots, d$, cioè $f = 0$. \square

Pertanto, è lecito su campi infiniti identificare polinomi e funzioni polinomiali. Quindi d'ora in avanti denoteremo con f anche la funzione polinomiale \tilde{f} poichè lavoreremo su un campo algebricamente chiuso, e vale

Proposizione 1.1.2

Se K è un campo algebricamente chiuso, allora $|K| = \infty$

Dimostrazione. Se K è finito, allora $p = 1 + \prod_{k \in K} (x - k)$ è un polinomio e non ha radici in K \square

In quanto segue il campo sarà sempre considerato algebricamente chiuso. Richiamiamo anche la definizione di radicale di un ideale:

Definizione 1.1.3

Sia $I \subset A, I$ ideale A anello. Il radicale di I è definito nel modo seguente:

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \exists m \in \mathbb{N}, a^m \in I\}.$$

Si verifica che \sqrt{I} è un ideale.

Diciamo che I è un ideale radicale se $I = \sqrt{I}$

Osservazione 1.1.4. Chiaramente gli ideali primi sono radicali: se I è primo, se $a^m \in I$ allora riscrivendo $a^m = a^{m-1}a$ abbiamo o $a \in I$ o $a^{m-1} \in I$. Ma ripetendo al più $m - 1$ volte il ragionamento si ha $a \in I$.

1.2 Cenni sugli spazi topologici noetheriani

Definizione 1.2.1

Diciamo noetheriano uno spazio topologico per cui valga la seguente condizione sulle catene di chiusi:

Siano $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ chiusi, $U_{i+1} \subseteq U_i$. Allora $\exists j \in \mathbb{N}$, tale che $U_i = U_j \quad \forall i \geq j$

Quindi uno spazio topologico noetheriano è uno spazio topologico che non ammette catene infinite strettamente discendenti di chiusi. Negli spazi noetheriani abbiamo alcuni concetti e valgono alcuni risultati generali che sfrutteremo e che ricordiamo qui sotto.

Nel seguito X denota uno spazio topologico noetheriano.

Definizione 1.2.2

Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice *irriducibile* se $Y \neq \emptyset$ e Y_1, Y_2 chiusi in Y , $Y = Y_1 \cup Y_2 \implies Y = Y_1$ o $Y = Y_2$

Proposizione 1.2.3

Sia $Y \subseteq X$ chiuso, $Y \neq \emptyset$, allora $\exists m \geq 1, Y_1, \dots, Y_m$ chiusi irriducibili univocamente determinati tali che

$$Y = \bigcup_{i=1}^m Y_i \text{ e } i \neq j \implies Y_i \not\subseteq Y_j \quad \forall i, j = 1, \dots, m$$

Dimostrazione. Si veda [2, prop.1.5] □

Definizione 1.2.4

Sia $Y \subseteq X$ chiuso. Diciamo

$$\dim Y := \sup\{n \in \mathbb{N}, \exists Y_1, \dots, Y_n \text{ chiusi irriducibili, } Y_i \subsetneq Y_{i+1}, Y_n \subsetneq Y\}$$

Gli spazi noetheriani inducono una topologia sugli irriducibili con aperti “molto grandi”, nel senso specificato dal seguente teorema:

Teorema 1.2.5

Sia Y un chiuso irriducibile di X e sia $A \subset Y, A \neq \emptyset$ aperto in Y . Allora A è denso in Y .

Dimostrazione. $Y = A^c \cup A = A^c \cup \overline{A}^Y$ Questi sono chiusi in un chiuso, quindi chiusi rispetto a X . Pertanto essendo irriducibile $Y = A^c$ oppure $Y = \overline{A}^Y$. Tuttavia $A \not\subseteq A^c \implies Y \neq A^c \implies Y = \overline{A}^Y$. □

Inoltre la noetherianità si preserva nel passaggio al quoziente e su sotto-spazi:

Proposizione 1.2.6

Sia N uno spazio topologico noetheriano, \sim una relazione di equivalenza su N e N/\sim il quoziente rispetto a \sim con la topologia quoziente. Allora N/\sim è noetheriano.

Dimostrazione. Se π è la proiezione sul quoziente, per definizione i chiusi di N/\sim sono immagine tramite π di chiusi saturi. Cioè, $Y \subset N/\sim$ è chiuso $\iff \pi^{-1}(Y)$ è chiuso.

Allora supponiamo esista una catena infinita discendente $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di chiusi nel quoziente, questa corrisponde a una catena $(\pi^{-1}(Y_i))_{i \in \mathbb{N}}$. Per quanto visto sopra, Y_i chiuso $\implies \pi^{-1}(Y_i)$ chiuso. Inoltre $Y_{i+1} \subsetneq Y_i \implies \pi^{-1}(Y_{i+1}) \subsetneq \pi^{-1}(Y_i)$. Ma una catena del genere non esiste in N perchè è noetheriano. \square

Proposizione 1.2.7

Sia N uno spazio topologico noetheriano, X un suo sottospazio. Allora X è noetheriano con la topologia indotta da N .

Dimostrazione. Sia, per assurdo, $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione strettamente decrescente di chiusi di X . Allora per definizione di topologia indotta abbiamo dei W_i chiusi tali che $Y_i = W_i \cap X$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Se la successione $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ non è decrescente, definiamo $Z_i = \bigcap_{j=1}^i W_j$. Chiamamente gli Z_i formano una successione di chiusi decrescente:

$$Z_{i+1} = \bigcap_{j=1}^{i+1} W_j = W_{i+1} \cap \bigcap_{j=1}^i W_j = W_{i+1} \cap Z_i \subset Z_i$$

e si ha:

$$X \cap Z_i = X \cap \bigcap_{j=1}^i W_j = \bigcap_{j=1}^i (X \cap W_j) = \bigcap_{j=1}^i Y_j = Y_i$$

Ovviamente essendo gli Y_i strettamente decrescenti lo sono anche gli Z_i : se $Z_i = Z_{i+1} \implies X \cap Z_i = X \cap Z_{i+1} \implies Y_i = Y_{i+1}$

Essendo $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione strettamente decrescente di chiusi questo contraddice la noetherianità di N . \square

1.3 La topologia di Zariski su \mathbb{A}^n

Da ora in poi poniamo

$$A := K[x_1, \dots, x_n]$$

e supponiamo sempre K algebricamente chiuso.

Definiamo due mappe:

$$\begin{aligned} V : \mathcal{P}(K[x_1, \dots, x_n]) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A}^n) \\ T &\longmapsto \{P \in \mathbb{A}^n, f(P) = 0 \quad \forall f \in T\} \\ I : \mathcal{P}(\mathbb{A}^n) &\longrightarrow \mathcal{P}(K[x_1, \dots, x_n]) \\ X &\longmapsto \{f \in A, f(P) = 0 \quad \forall P \in X\} \end{aligned}$$

Scriveremo anche se $f_1, \dots, f_n \in A$, $V(f_1, \dots, f_n) = V(\{f_1, \dots, f_n\})$.

Definizione 1.3.1

Su $\mathbb{A}^n(K)$ definiamo topologia di Zariski la topologia che ha per chiusi gli insiemi di $\text{Im } V$. I chiusi sono detti insiemi algebrici affini.

Per la buona posizione di questa definizione si veda [2, ch.1, prop 1.1]

Questa topologia dà luogo a uno spazio noetheriano. È piuttosto immediato osservare che:

Proposizione 1.3.2

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Allora $I(X)$ è un ideale.

Dimostrazione. Basta osservare che

Presi $f \in I(X)$ e $g \in A$ $(fg)(P) = f(P)g(P) = 0g(P) = 0 \quad \forall P \in X$

Presi $f, g \in I(X)$ $(f + g)(P) = f(P) + g(P) = 0 + 0 = 0 \quad \forall P \in X$ □

Proposizione 1.3.3

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Allora $I(X) = I(\overline{X})$

Dimostrazione. Basta osservare che chiaramente $X \subseteq \overline{X}$, pertanto $I(\overline{X}) \subseteq I(X)$.

L'altro verso si ricava ricordando che i polinomi sono funzioni continue per la Zariski, quindi se $f \in I(X)$ essendo $\{0\}$ chiuso, $f^{-1}(\{0\})$ è chiuso e di conseguenza

$$X \subseteq f^{-1}(\{0\}) \implies \overline{X} \subseteq f^{-1}(\{0\}) \implies f \in I(\overline{X})$$

□

Si può quindi osservare che tramite V e I si ha una corrispondenza che inverte le inclusioni tra ideali e insiemi algebrici. Questa non è una corrispondenza biunivoca, tuttavia, in virtù del seguente teorema, si può rendere tale riducendosi a considerare insiemi algebrici e ideali radicali.

Teorema 1.3.4 (Hilbert Nullstellensatz)

Sia $\alpha \subset A = K[x_1 \dots x_n]$ ideale, con K algebricamente chiuso, allora $I(V(\alpha)) = \sqrt{\alpha}$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [1, pg 85].

Sfruttando questa corrispondenza, abbiamo immediatamente che la noetherianità dell'anello A si riflette nella noetherianità della topologia: infatti una catena discendente di chiusi infinita corrisponderebbe a una catena ascendente di ideali infinita, che però non esiste perchè A è noetheriano.

Uno dei risultati più importanti riguardo questa corrispondenza mostra che gli irriducibili corrispondono ad ideali primi:

Proposizione 1.3.5

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico, allora X è irriducibile $\iff I(X)$ è primo

Dimostrazione. \implies

Se $I(X)$ non è primo, allora esistono $f, g \notin I(X)$ tali che $fg \in I(X)$.

Allora posti $X_1 = V(f) \cap X$ e $X_2 = V(g) \cap X$, questi sono chiusi e si ha:

$$\forall P \in X, fg(P) = 0 \implies f(P) = 0 \text{ oppure } g(P) = 0 \implies P \in X_1 \cup X_2$$

Pertanto

$$X \subseteq X_1 \cup X_2 = (V(f) \cap X) \cup (V(g) \cap X) = (V(f) \cup V(g)) \cap X \subseteq X \implies X = X_1 \cup X_2$$

Chiaramente $X_1 \subsetneq X$ poichè se avessimo $X_1 = X$ seguirebbe $I(X_1) = I(X)$

ma $X_1 \subset V(f) \implies f \in I(X_1)$ e per ipotesi $f \notin I(X)$. Analogamente per X_2 .

\Leftarrow

Se X è riducibile, esistono $X_1, X_2 \subsetneq X$ algebrici tali che $X_1 \cup X_2 = X$.

Ma $X_1 \subsetneq X \implies I(X) \subsetneq I(X_1) \implies \exists f \in I(X_1) \setminus I(X)$.

Analogamente esiste $g \in I(X_2) \setminus I(X)$.

E basta osservare che per ogni $P \in X$

$$fg(P) = f(P)g(P) = 0 \implies fg \in I(X)$$

pertanto $I(X)$ non è primo.

Capitolo 2

Anelli graduati

Ricordiamo che K denota un campo algebricamente chiuso.

2.1 Anelli graduati e ideali omogenei

Ricordiamo la definizione di somma diretta di gruppi abeliani:

Definizione 2.1.1

Sia $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di gruppi abeliani. La somma diretta dei G_λ è il gruppo abeliano dato dall'insieme

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda := \{ \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, g_\lambda \in G_\lambda, g_\lambda \neq 0 \text{ per al più un numero finito di } \lambda \}$$

con la somma

$$\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} + \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} := \{g_\lambda + f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

Definizione 2.1.2

Un gruppo abeliano R si dice somma diretta interna di suoi sottogruppi abeliani $R_\lambda, \lambda \in \Lambda$ se la mappa:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda &\longrightarrow R \\ \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} &\longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda, g_\lambda \neq 0} g_\lambda \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Definiamo quindi la struttura di anello graduato:

Definizione 2.1.3

Un anello R si dice graduato se esistono $R_d, d \in \mathbb{N}$ sottogruppi abeliani additivi tali che il suo gruppo additivo sia $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$ e

$$f_d \in R_d, f_m \in R_m \implies f_d f_m \in R_{d+m}.$$

Diciamo che f è omogeneo se $\exists d \in \mathbb{N}, f \in R_d$. Diciamo d il grado di $f_d \in R_d$.

Diciamo R_d componente omogenea di grado d di R .

Dato $f \in R$ allora esistono unici $f_d \in R_d$ tali che $f = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$. Gli f_d si dicono componenti omogenee di grado d di f .

Posta questa definizione è piuttosto naturale chiedersi quali ideali si ripartiscono "bene" sulla scomposizione. Nel seguito R denota sempre un anello graduato $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$

Definizione 2.1.4

Sia $I \subseteq R$ ideale, I si dice omogeneo se $I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} (I \cap R_d)$

Quindi I è omogeneo se vale:

$$f \in I \iff \text{tutte le componenti omogenee di } f \text{ stanno in } I$$

Osservazione 2.1.5. Ricordiamo che, per definizione di somma diretta, quando scriviamo $f = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$, i termini f_d della somma sono non nulli per un numero finito di elementi.

Inoltre, sempre per definizione di somma diretta, se si ha $f = g + h \in R$, allora $f_d = g_d + h_d$.

Osservazione 2.1.6. Siano g omogeneo di grado k e $h \in R$; allora $f = hg$ ha componenti omogenee che si scrivono $f_{d+k} = gh_d$. Infatti $f = g \sum_{d \in \mathbb{N}} h_d = \sum_{d \in \mathbb{N}} gh_d$

Lemma 2.1.7

Se $I \subseteq R$ è un ideale, dato $f = ag + bh \in I$, dove $a, b \in R, g, h \in I$, se le componenti omogenee di g e h stanno in I , allora anche quelle di f stanno in I

Dimostrazione. Sia $f = ag + bh = \sum_{d \in \mathbb{N}} ag_d + \sum_{d \in \mathbb{N}} bh_d$.

Allora poichè le componenti omogenee di g stanno in I , per le osservazioni sopra abbiamo che le componenti di ag_d sono nella forma $a_k g_d$ e quindi stanno in I . Allora, essendo f somma di polinomi del tipo ag_d e bh_d , la somma delle sue componenti omogenee è somma di quelle di questi che stanno in I . Pertanto per chiusura rispetto alla somma di I , anche le componenti omogenee di f stanno in I .

La seguente affermazione caratterizza gli ideali omogenei finitamente generati:

Proposizione 2.1.8

Sia $I \subseteq R$ un ideale. Allora

I è finitamente generato e omogeneo \iff esistono $F_1, \dots, F_n \in R$ omogenei tali che $I = (F_1, \dots, F_n)$

Dimostrazione. (\Leftarrow)

$f \in I \implies f = \sum_{i=1}^n a_i F_i, a_i \in R$ e usando il lemma 2.1.7, si vede che le componenti omogenee di F_i stanno in I

(\implies)

Per ipotesi $\exists m \in \mathbb{N}, \exists \{f^{(i)}\}_{i=1, \dots, m}, f^{(i)} \in R$ tali che $I = (f^{(1)}, \dots, f^{(m)})$.

Poichè $f^{(i)} \in I$ ideale omogeneo $\implies f_d^{(i)} \in I$.

Da cui posto $J := (\{f_d^{(i)}\}_{d \in \mathbb{N}, i=1 \dots n})$ abbiamo $J \subseteq I$. Ma d'altra parte

$f^{(i)} = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_d^{(i)} \implies f^{(i)} \in J \quad \forall i = 1, \dots, n \implies I \subseteq J$ □

Vediamo ora che valgono alcuni risultati che ci garantiscono che le operazioni di somma e intersezione tra ideali sono interne all'insieme degli ideali omogenei.

Proposizione 2.1.9

Dati I, J ideali omogenei, allora $I + J$ e $I \cap J$ sono omogenei

Dimostrazione. Preso $f \in I + J$ allora $f = g + h, g \in I, h \in J$. Le componenti omogenee di g e h stanno in $I + J$ poichè essendo I, J omogenei, se g_d è la componente di grado d di g , si ha che $g_d \in I \subseteq I + J$, e analogamente

per quella di h si ha $h_d \in J \subseteq I + J$.

Per quanto riguarda l'intersezione, la verifica è ancora più semplice: essendo sia I che J omogenei, le componenti omogenee di ciascun polinomio nell'intersezione stanno in entrambi gli ideali, quindi anche nell'intersezione. \square

Si vede inoltre che la condizione di primalità per un ideale omogeneo si semplifica:

Proposizione 2.1.10

Sia I un ideale omogeneo, $I \neq R$. Allora

I è primo $\iff \forall F, G \in R$ omogenei tali che $FG \in I$ vale che $F \in I$ o $G \in I$

Dimostrazione. \implies è banale.

Per mostrare \impliedby , proviamo che $R \setminus I$ è chiuso rispetto al prodotto.

Siano $f, g \notin I$.

Indicando con f_d, g_k le componenti omogenee rispettivamente di f e di g di grado d e k , abbiamo che $\exists a, b \in \mathbb{N}, f_a, g_b \notin I$.

Mostriamo allora che una componente omogenea di fg non sta in I . Infatti, scelti a, b come sopra minimi, la componente omogenea di grado $a + b$ di fg è

$$p = \sum_{d+k=a+b} f_d g_k = \sum_{\substack{d+k=a+b \\ (d,k) \neq (a,b)}} f_d g_k + f_a g_b$$

Ma la prima sommatoria sta in I .

Infatti:

$$d < a \implies f_d \in I \implies f_d g_k \in I \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$d > a \implies (k + d = a + b \implies k = a + b - d < b \implies g_k \in I \implies f_d g_k \in I \quad \forall d \in \mathbb{N})$$

Allora $p \in I \iff f_a g_b \in I$. Ma per ipotesi, essendo f_a, g_b omogenei e non in I , il loro prodotto non sta in I . \square

Allo stesso modo di quanto fatto per gli ideali, in generale:

Definizione 2.1.11

Diciamo $J \subset R$ insieme omogeneo se $\forall f \in J$ vale $f_d \in J \quad \forall d \in \mathbb{N}$

Diciamo $\text{omog}(J) = J \cup \{f_d, f_d \text{ componente omogenea di grado } d \text{ di } f \in J, d \in \mathbb{N}\}$ cioè il più piccolo insieme omogeneo che contiene J .

Chiaramente un ideale omogeneo è anche un insieme omogeneo. Inoltre, l'ideale generato da $\text{omog}(J)$, dove J è un insieme, è un ideale omogeneo. Vorremmo ora introdurre l'esempio che useremo in seguito.

Su $K[x_0, \dots, x_n]$ possiamo dare una struttura di anello graduato considerando come componenti omogenee

$$S_d = \{f \in A, f \text{ omogeneo di grado } d\} \cup \{0\}, d \in \mathbb{N}.$$

Per evitare confusione, se vorremo considerare la struttura di anello graduato, invece di scrivere A per indicare $K[x_0, \dots, x_n]$, scriveremo S .

Indicheremo con $S_+ = (x_0, \dots, x_n)$ l'ideale omogeneo generato dalle indeterminate. Notiamo che S_+ è l'ideale massimale corrispondente al punto 0 in \mathbb{A}^{n+1} (nell'identificazione ideali massimali-punti affini).

Inoltre è l'unico ideale massimale omogeneo.

Proposizione 2.1.12

L'unico ideale massimale omogeneo di A è S_+

Dimostrazione. Per provare la massimalità notiamo che la mappa:

$$\begin{aligned} K[x_0, \dots, x_n] &\longrightarrow K \\ p(x_0, \dots, x_n) &\longmapsto p(1, \dots, 1) \end{aligned}$$

induce un isomorfismo:

$$K[x_0, \dots, x_n]_{S_+} \cong K$$

Essendo K un campo, S_+ è massimale.

Resta da provare l'unicità.

Se I è un ideale massimale omogeneo, allora è generato da polinomi omogenei f_1, \dots, f_r . Non possono essere omogenei di grado 0, altrimenti sarebbero

invertibili e I coinciderebbe con S .

Allora un polinomio in $(x_i) + I$ è nella forma:

$$ax_i + \sum_{j=1, \dots, r} b_j f_j, a, b_j \in S$$

Allora ha termine noto 0. Quindi non è invertibile. Pertanto $(x_i) + I$ è un ideale proprio di S . Ma per massimalità $(x_i) + I = I$ da cui $x_i \in I$. Allora $S_+ \subset I$, da cui $S_+ = I$.

2.2 Morfismi dall'anello dei polinomi in un anello graduato

La struttura di anello graduato che abbiamo sui polinomi si riflette nei morfismi che si possono costruire tra l'anello dei polinomi e un anello graduato. In particolare ci servirà questo risultato:

Proposizione 2.2.1

Sia $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$ un anello graduato tale che $K = R_0$, sia $N \in \mathbb{N}$ fissato, e siano $f_0, \dots, f_N \in R_d$, $d \neq 0$.

Consideriamo il morfismo di anelli

$$\begin{aligned} \phi : K[z_0, \dots, z_N] &\rightarrow R \\ p(z_0, \dots, z_N) &\mapsto p(f_0, \dots, f_N) \end{aligned}$$

Vale che:

per ogni $p \in K[z_0, \dots, z_N]$ di componenti omogenee p_j di grado d_j , $j = 1, \dots, m$ abbiamo che $\phi(p)$ ha componenti omogenee $\phi(p_j) \in R_{dd_j}$

Dimostrazione. Proviamo prima per p monomio di grado s e vediamo che:

$$p = \prod_{j=0}^N z_j^{i_j} \implies \phi(p) = \prod_{j=0}^N \phi(z_j^{i_j}) = \prod_{j=0}^N f_j^{i_j}$$

Ma essendo f_j omogeneo, usando le proprietà dell'anello graduato si ha che:

$$f_j \in R_d \implies f_j^{i_j} \in R_{di_j} \implies \phi(p) = \prod_{j=0}^N f_j^{i_j} \in R_{ds}$$

Pertanto si ha che monomi di grado s vanno in polinomi di grado ds .

Ma d'altra parte essendo i monomi di grado s generatori dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado s , ed essendo gli R_d chiusi per somma e prodotto per elementi di grado 0 (quindi per elementi di K), abbiamo che in generale polinomi omogenei di grado s vanno in polinomi omogenei di grado sd .

Allora chiaramente, dette p_0, \dots, p_t le componenti omogenee di un polinomio p qualsiasi si ha che:

$$\phi(p) = \phi\left(\sum_{j=1}^t p_j\right) = \sum_{j=1}^t \phi(p_j)$$

e siccome $\phi(p_j) \in R_{dj}, j = 0, \dots, t$ e i dj sono tutti diversi fra loro, abbiamo che $\phi(p_j)$ sono le componenti omogenee di $\phi(p)$. \square

Corollario 2.2.2

Sia ϕ come sopra. Allora $\text{Ker } \phi$ è omogeneo.

Dimostrazione.

$$p \in \text{Ker } \phi \implies 0 = \phi(p)$$

Ma le componenti omogenee di 0 sono tutte 0, quindi per la proposizione si ha $\phi(p_j) = 0$, cioè $p_j \in \text{Ker } \phi$

Capitolo 3

Insiemi algebrici proiettivi e ideali omogenei

Ricordiamo che K denota sempre un campo algebricamente chiuso.

3.1 Topologia di Zariski su \mathbb{P}^n

Definizione 3.1.1 (Spazio Proiettivo)

Diciamo spazio proiettivo di dimensione n sul campo K l'insieme

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(K) = \{ \langle v \rangle, v \in K^{n+1} \}$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

Dove \sim indica la relazione di equivalenza:

$$(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \iff \exists \lambda \in K^*, \text{ tale che } (a_0, \dots, a_n) = \lambda(b_0, \dots, b_n)$$

Scriveremo $[a_0, \dots, a_n] := [(a_0, \dots, a_n)]$ per indicare la classe di (a_0, \dots, a_n) nel quoziente scritto sopra, omettendo le parentesi interne per brevità, e chiameremo coordinate omogenee del punto un qualunque rappresentante della classe.

Un punto di \mathbb{P}^n è una $n + 1$ -upla di coordinate identificate a meno di uno scalare non nullo. Vogliamo costruire un analogo della topologia di Zariski che abbiamo definito sull'affine. Tuttavia cercando di ripetere la stessa procedura, abbiamo immediatamente il problema che l'applicazione introdotta nella sezione 1.1 $f \mapsto \tilde{f}$ non è ben definita in coordinate omogenee, per esempio $x_0^2 - x_1$ si annulla su $(1, 1)$ ma in \mathbb{P}^1 $[1, 1] = [2, 2]$ e $x_0^2 - x_1$ non si annulla su $(2, 2)$.

Innanzitutto, osserviamo che anche nella costruzione affine siamo interessati solo al luogo degli zeri del polinomio. Cerchiamo quindi di restringere l'insieme dei polinomi che consideriamo in modo che abbia senso chiedersi se il polinomio si annulla su un punto di \mathbb{P}^n . Osserviamo che questo è vero se e solo se $f(a_0, \dots, a_n) = 0 \implies f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0 \quad \forall \lambda \in K^*$.

Consideriamo allora la struttura di anello graduato su $S = K[x_0, \dots, x_n]$. Possiamo scrivere

$$S \ni f = \sum_{i=0}^r f_i, \text{ con } f_i \in S_i$$

Allora valutando f in $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ si ha

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_{i=0}^r f_i(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_{i=0}^r \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n)$$

dove nell'ultima uguaglianza sfruttiamo l'omogeneità degli f_i .

Ma $\sum_{i=0}^r \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n)$ è un polinomio in λ che quindi si annulla su K^* (che è infinito) se e solo se è il polinomio nullo. Pertanto possiamo dedurre che chiedere che un polinomio si annulli su tutti i rappresentanti di un punto al proiettivo è equivalente a chiedere l'annullarsi di tutte le sue componenti omogenee su un rappresentante di classe qualsiasi.

Abbiamo quindi che

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0 \quad \forall \lambda \in K^* \iff f_d(a_0, \dots, a_n) = 0 \quad \forall d \in \mathbb{N}$$

Pertanto è logico definire la mappa

$$\begin{aligned} I : \mathcal{P}(\mathbb{P}^n) &\longrightarrow \mathcal{P}(S) \\ X &\longmapsto \{f \in S, f_d(a_0, \dots, a_n) = 0 \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad \forall [a_0, \dots, a_n] \in X\} \end{aligned}$$

in analogia con il caso affine.

Immediata conseguenza della definizione è che $I(X)$ è un ideale omogeneo.

Allo stesso modo definiamo come al caso affine:

$$\begin{aligned} V : \mathcal{P}(S) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}^n) \\ I &\longmapsto \{P = [a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n, f_d(a_0, \dots, a_n) = 0 \quad \forall f \in I \quad \forall d \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

È evidente che per come abbiamo posto le definizioni, preso $J \subseteq S$ vale che $V(J)$ è uguale all'immagine tramite V dell'ideale generato da $\text{omog}(J)$ che sappiamo essere ideale omogeneo. Quindi restringendoci a considerare ideali omogenei non cambiamo $\text{Im } V$.

Rimane ovviamente il fatto che le due mappe invertono le inclusioni ($I \subseteq J \implies V(J) \subseteq V(I)$ perchè semplicemente J impone più condizioni, e analogamente $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^n \implies I(X) \supseteq I(Y)$).

Completando l'analogia con l'affine finalmente:

Definizione 3.1.2

Gli elementi di $\text{Im } V$ sono detti insiemi algebrici proiettivi. Diciamo topologia di Zariski su \mathbb{P}^n , la topologia che ha per chiusi gli insiemi algebrici proiettivi.

Notiamo anche che:

Proposizione 3.1.3

Sia X algebrico, allora $X = V(I(X))$

Dimostrazione. Essendo X algebrico, $X = V(J)$, dove J è un ideale omogeneo. Allora $J \subseteq I(X)$ pertanto $V(I(X)) \subseteq V(J) = X$. D'altra parte, chiaramente $X \subseteq V(I(X))$ direttamente dalla definizione. \square

Identificando K^{n+1} con \mathbb{A}^{n+1} e denotando la proiezione sul quoziente:

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (a_0, \dots, a_n) &\longmapsto [a_0, \dots, a_n]\end{aligned}$$

dove 0 denota $(0, \dots, 0)$, questa costruzione evidenzia che la topologia così costruita su \mathbb{P}^n è la topologia quoziente ereditata dalla Zariski su $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$. Infatti basta rileggere la costruzione per vedere che i chiusi che abbiamo definito in \mathbb{P}^n sono le immagini tramite la proiezione sul quoziente di chiusi saturi di $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Nel seguito lavoreremo tra il proiettivo e l'affine, quindi distingueremo chiamando V_a, I_a le mappe V, I definite per l'affine e V_p, I_p quelle al proiettivo. Anzitutto osserviamo che:

Proposizione 3.1.4

Sia $I \subset S$ ideale. Allora I è omogeneo $\implies V_a(I) \setminus \{0\}$ saturo.

Inoltre, se I è radicale allora $V_a(I) \setminus \{0\}$ saturo $\implies I$ è omogeneo.

Dimostrazione. Per la prima parte basta osservare che:

se $I = S$ o S_+ , allora $V_a(I) \setminus \{0\} = \emptyset$ che è saturo.

se $I \neq S, S_+$ invece $V_a(I) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ quindi se I è omogeneo:

$$P \in V_a(I) \setminus \{0\} \iff f(P) = 0 \quad \forall f \in I \iff f_d(P) = 0 \quad \forall f \in I \quad \forall d \in \mathbb{N}$$

(dove f_d indica sempre la componente omogenea di grado d).

Perciò $\{\lambda(P - O)\}_{\lambda \in K} \subseteq V_a(I)$, quindi $V_a(I) \setminus \{0\}$ è saturo.

Per la seconda, se I è radicale e $V_a(I) \setminus \{0\}$ è saturo:

$$\begin{aligned}\forall P \in V_a(I) \setminus \{0\}, \{\lambda(P - O)\}_{\lambda \in K} &\subseteq V_a(I) \\ \iff \forall P \in V_a(I) \setminus \{0\}, f_d(P) = 0 \quad \forall f \in I \quad \forall d \in \mathbb{N} \\ &\implies f_d \in I(V_a(I)) = \sqrt{I} = I\end{aligned}$$

□

pertanto:

Proposizione 3.1.5

La topologia di Zariski su \mathbb{P}^n è la topologia quoziente della topologia di Zariski su $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$

Dimostrazione. Basta osservare che, preso $I \subseteq S$ ideale omogeneo :

$$\pi^{-1}(V_p(I)) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ tali che } f_d(a_0, \dots, a_n) = 0 \forall f \in I \forall d \in \mathbb{N}\} = \\ V_a(I) \setminus \{0\} = V_a(\sqrt{I}) \setminus \{0\}$$

allora la preimmagine dei chiusi è chiusa. Inoltre un generico chiuso saturo di $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ per la 3.1.4 è nella forma $V_a(I) \setminus \{0\}$ con I omogeneo e radicale. Pertanto il calcolo appena fatto mostra $V_a(I) \setminus \{0\} = \pi^{-1}(V_p(I))$. \square

Questo fatto permette di trasportare al proiettivo alcuni risultati fondamentali.

Per prima cosa, abbiamo che la topologia di Zariski sul proiettivo è noetheriana, in quanto quoziente di un sottospazio dell'affine con la Zariski che è noetheriano (da 1.2.6 e 1.2.7)

Nella prossima sezione ci occuperemo proprio di investigare le relazioni tra chiusi di \mathbb{P}^n e i chiusi saturi dell'affine.

3.2 La corrispondenza insiemi algebrici-ideali omogenei

Definizione 3.2.1

Sia X un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{P}^n , definiamo cono su X l'insieme:
 $c(X) = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$

Proposizione 3.2.2

In \mathbb{A}^{n+1} , se X è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{P}^n si ha $\overline{\pi^{-1}(X)} = \overline{c(X)}$

Dimostrazione. Ovviamente $\overline{\pi^{-1}(X)} \subseteq \overline{c(X)}$.

Ma se $P = (a_0, \dots, a_n) \in \pi^{-1}(X)$, essendo saturo $\pi^{-1}(X) \supseteq \{\lambda(P - O), \lambda \in K^*\}$. Il più piccolo chiuso che contiene $\{\lambda(P - O), \lambda \in K^*\}$ è la retta

$\{\lambda(P - O), \lambda \in K\}$. Infatti basta pensare preso un polinomio $f \in A$ che si annulla su $\{\lambda(P - O), \lambda \in K^*\}$ e sostituendo $f(\lambda(P - O))$ si ha un polinomio in λ che si annulla su tutto K^* . Quindi $f(\lambda(P - O)) = 0$ e si annulla anche per $\lambda = 0$, quindi f si annulla in 0 .

Pertanto $c(X) \subseteq \overline{\pi^{-1}(X)}$ quindi $\overline{c(X)} \subseteq \overline{\pi^{-1}(X)}$. \square

Proposizione 3.2.3

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $X \neq \emptyset$. Sono equivalenti

1. X chiuso
2. $c(X) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ chiuso
3. $\overline{\pi^{-1}(X)} = c(X)$

Dimostrazione. $3 \implies 2$: non c'è niente da provare

$2 \implies 3$: se $X \neq \emptyset$ vale la 3.2.2, perciò $\overline{c(X)} = \overline{\pi^{-1}(X)}$, ma per ipotesi $c(X)$ è chiuso

$2 \implies 1$

Segue dalla definizione di topologia quoziente:

Se $c(X)$ è chiuso in \mathbb{A}^{n+1} allora $\pi^{-1}(X)$ è chiuso in $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ quindi per definizione di topologia quoziente, X è chiuso in \mathbb{P}^n .

$1 \implies 2$

Se X è chiuso in \mathbb{P}^n allora $\pi^{-1}(X)$ è chiuso in $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, ed essendo per ipotesi $\emptyset \neq \pi^{-1}(X)$ allora $0 \in \overline{\pi^{-1}(X)}$ come si è visto nella dimostrazione di 3.2.2. \square

Perciò i coni sono insiemi algebrici se e solo se sono coni su insiemi algebrici non vuoti del proiettivo., nel qual caso si scrivono come $V_a(I)$.

Proposizione 3.2.4

Sia I un ideale omogeneo di S con $I \neq S, S_+$. Allora $c(V_p(I)) = V_a(I)$.

Dimostrazione. Visto nella prova di 3.1.5 \square

Dalla definizione di cono segue che:

Proposizione 3.2.5

Dato $\emptyset \neq X \subset \mathbb{P}^n$ vale: $I_p(X) = I_a(\pi^{-1}(X)) = I_a(c(X))$

Dimostrazione. Basta osservare che:

$$\begin{aligned} I_a(\pi^{-1}(X)) &= \{f \in S, f(P) = 0 \quad \forall P \in \pi^{-1}(X)\} = \\ &= \{f \in S, f(\lambda(a_0, \dots, a_n)) = 0 \quad \forall [a_0, \dots, a_n] \in X, \forall \lambda \in K^*\} = \\ &= \{f \in S, f_d(a_0, \dots, a_n) = 0 \quad \forall [a_0, \dots, a_n] \in X, \forall d \in \mathbb{N}\} = I_p(X) \end{aligned}$$

In più $I_a(\pi^{-1}(X)) = I_a(c(X))$ poichè $\pi^{-1}(X)$ è denso in $c(X)$ da 3.2.2 (l'uguaglianza tiene per prop. 1.3.3) . \square

Da questi risultati, abbiamo che :

Teorema 3.2.6

Sia X chiuso non vuoto di \mathbb{P}^n , sono equivalenti:

1. $X \subset \mathbb{P}^n$ è irriducibile
2. $I_p(X)$ è primo
3. $c(X)$ è irriducibile.

Dimostrazione. 2 \iff 3 è noto: viene da 3.1.3 e 1.3.5 considerando che $c(X) = c(V_p(I_p(X))) = V_a(I_p(X))$.

3 \implies 1.

Se X è riducibile allora $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \subsetneq X$ chiusi.

Allora $\pi^{-1}(X) = \pi^{-1}(X_1) \cup \pi^{-1}(X_2)$ e quindi, unendo $\{0\}$ a entrambi, $c(X) = c(X_1) \cup c(X_2)$ che per la 3.2 è una scomposizione in chiusi propri di $c(X)$. Quindi $c(X)$ è riducibile.

1 \implies 2

Se $I_p(X)$ non è primo, per 2.1.10 o $I_p(X) = S$, nel qual caso $X = \emptyset$ cosa che contraddice le ipotesi, oppure esistono $F, G \in S$ omogenei tali che $FG \in I_p(X)$, $F, G \notin I_p(X)$. Allora i due insiemi algebrici definiti da

$V_p(F), V_p(G)$ in \mathbb{P}^n non contengono X . Tuttavia $V_p(F) \cup V_p(G) \supseteq X$ poichè

$$\forall P \in X, FG(P) = 0 \implies F(P) = 0 \vee G(P) \implies P \in V(F) \cup V(G)$$

Quindi scrivendo $(V(F) \cap X) \cup (V(G) \cap X) = X$ abbiamo che X è riducibile.

Infine, riusciamo a ottenere una versione proiettiva del Nullstellensatz.

Teorema 3.2.7

Dato $I \subset S$ ideale omogeneo tale che $I \neq S, S_+$, allora

$$I_p(V_p(I)) = \sqrt{I}$$

Dimostrazione. basta ragionare sui coni:

$$I_p(V_p(I)) = I_a(c(V_p(I))) = I_a(V_a(I)) = \sqrt{I} \text{ per il Nullstellensatz affine.}$$

Tutto quanto precede ci assicura che c'è una corrispondenza biunivoca che rovescia le inclusioni tra l'insieme \mathcal{A} degli insiemialgebrici proiettivi di \mathbb{P}^n diversi dal \emptyset e l'insieme \mathcal{R} degli ideali radicali omogenei di $S = K[x_0, \dots, x_n]$ diversi da S e S_+ :

$$\mathcal{A} \xrightleftharpoons[V]{I} \mathcal{R}$$

Per completezza, guardiamo anche il caso $X = \emptyset$.

La corrispondenza biunivoca che avevamo nell'affine tra ideali radicali e insiemi algebrici, non è più tale nel proiettivo nel momento in cui consideriamo l'insieme \emptyset : sia S che S_+ sono ideali radicali e omogenei, ma entrambi corrispondono all'insieme vuoto. Questo è dovuto al fatto che gli insiemi algebrici associati a S e S_+ nell'affine sono rispettivamente \emptyset e $\{0\}$, ma quest'ultimo è un punto che eliminiamo nel passare al proiettivo. Poichè non c'è un modo naturale per scegliere di privilegiare uno dei due e cercare di adattare la corrispondenza ideali-chiusi rendendola biunivoca, si preferisce semplicemente considerare il \emptyset come un caso a parte. L'ideale S_+ viene detto ideale irrilevante.

Ricordiamo anche che dalla noetherianità dell'anello $K[x_0, \dots, x_n]$ e dalla proposizione 2.1.8 segue che ogni ideale omogeneo di $K[x_0, \dots, x_n]$ ammette un sistema finito di generatori omogenei. Quindi ogni insieme algebrico proiettivo è del tipo $V(g_1, \dots, g_t)$ con i g_i omogenei.

3.3 Un esempio di mappa continua su \mathbb{P}^n

Naturalmente, definita una topologia la domanda che sorge spontanea è quali siano le mappe continue. Possiamo vedere che:

Proposizione 3.3.1

Siano $f_0, \dots, f_N \in K[z_0, \dots, z_n]$ polinomi omogenei di grado d e $Z = \bigcap_{i=0}^N V(f_i)$, allora la mappa:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^n \setminus Z &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ [z_0, \dots, z_n] &\mapsto [f_0(z_0, \dots, z_n), \dots, f_N(z_0, \dots, z_n)] \end{aligned}$$

è ben definita e continua.

Dimostrazione. La buona definizione segue da:

preso $M \in K^*$

$$\begin{aligned} \psi([Mz_0, \dots, Mz_n]) &= [f_0(Mz_0, \dots, Mz_n), \dots, f_N(Mz_0, \dots, Mz_n)] = \\ &= [M^d f_0(z_0, \dots, z_n), \dots, M^d f_N(z_0, \dots, z_n)] = [f_0(z_0, \dots, z_n), \dots, f_N(z_0, \dots, z_n)] \end{aligned}$$

Inoltre poichè gli f_i non hanno zeri comuni su $\mathbb{P}^n \setminus Z$, $\psi([z_0, \dots, z_n])$ non è mai $[0, \dots, 0]$ che non sarebbe un punto di \mathbb{P}^N .

La continuità invece si ottiene mostrando che le preimmagini dei chiusi sono chiusi. Infatti, sia $V(p_1, \dots, p_k)$ un insieme algebrico di \mathbb{P}^N , $p_1, \dots, p_k \in K[x_0, \dots, x_N]$ omogenei.

Allora si può provare che per un punto $P \in \mathbb{P}^n \setminus Z$

$$P \in \psi^{-1}(V(p_1, \dots, p_k)) \iff P \in V(p_1(f_0, \dots, f_N), \dots, p_k(f_0, \dots, f_N))$$

Anzitutto, osserviamo che per la proposizione 2.2.1 i polinomi $p_1(f_0, \dots, f_N), \dots, p_k(f_0, \dots, f_N)$ sono omogenei.

D'altra parte,

$$P \in \psi^{-1}(V(p_1, \dots, p_k)) \iff \psi(P) \in V(p_1, \dots, p_k)$$

e posto $P = [z_0, \dots, z_n]$ si ha

$$\begin{aligned} \psi(P) \in V(p_1, \dots, p_k) &\iff [f_0(z_0, \dots, z_n), \dots, f_N(z_0, \dots, z_n)] \in V(p_1, \dots, p_k) \iff \\ &p_i(f_0(z_0, \dots, z_n), \dots, f_N(z_0, \dots, z_n)) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \iff \\ &P = [z_0, \dots, z_n] \in V(p_1(f_0, \dots, f_N), \dots, p_k(f_0, \dots, f_N)) \end{aligned}$$

Pertanto $\psi^{-1}(V(p_1, \dots, p_k)) = V(p_1(f_0, \dots, f_N), \dots, p_k(f_0, \dots, f_N)) \cap (\mathbb{P}^n \setminus Z)$ e quindi è un chiuso. \square

In particolare:

Corollario 3.3.2

Siano $f_0, \dots, f_N \in K[z_0, \dots, z_n]$ polinomi omogenei di grado d che non abbiano zeri comuni, allora la mappa:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ [z_0, \dots, z_n] &\longmapsto [f_0(z_0, \dots, z_n), \dots, f_N(z_0, \dots, z_n)] \end{aligned}$$

è ben definita e continua.

Osservazione 3.3.3. Si può dare una definizione generale di morfismo tra varietà proiettive (per la definizione di varietà si veda 4.1.1, per la definizione di morfismo si veda [2] I.3). Le mappe della proposizione 3.3.1 sono più che applicazioni continue, sono morfismi proiettivi.

Capitolo 4

Esempi di varietà proiettive

4.1 Un risultato preliminare

Il nostro scopo è di studiare gli insiemi algebrici. Come avevamo anticipato, per studiare i chiusi di uno spazio Noetheriano sono di particolare interesse gli irriducibili, poichè tutti gli altri si ottengono tramite unioni finite. Allora diamo la seguente:

Definizione 4.1.1

Una varietà (algebrica) proiettiva $X \subset \mathbb{P}^n$ è un chiuso irriducibile di \mathbb{P}^n

Abbiamo già osservato (prop 3.2.6) che i chiusi irriducibili corrispondono agli ideali primi.

In particolare, abbiamo quindi che preso $f \in S$, $X \subseteq \mathbb{P}^n$ algebrico tale che $I(X) = (f)$, questo è una varietà se e solo se f è irriducibile (infatti per ideali principali essere primi è equivalente ad essere generati da un polinomio irriducibile). Quindi se f è irriducibile, $V(f)$ è una varietà poichè $I(V(f)) = \sqrt{(f)} = (f)$ che è primo.

Chiaramente non tutte le varietà sono in questa forma (non tutti gli insiemi algebrici sono associati a ideali radicali principali). Nel seguito costruiamo alcuni esempi di varietà ben noti. Useremo la seguente proposizione:

Proposizione 4.1.2

Siano $k, m \in \mathbb{N}$ e $r_1, \dots, r_k, N \in \mathbb{N}$ e $f_0, \dots, f_N \in K[a_0^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}, \dots, a_0^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)}]$ tali che siano tutti omogenei dello stesso grado in ciascun gruppo di variabili, cioè ogni f_j è omogeneo di grado d_1 nelle variabili $a_0^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}, \dots$, di grado d_k nelle variabili $a_0^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)}$ e senza zeri comuni. Allora la mappa

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^{r_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{r_k} &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ \left([a_0^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}], \dots, [a_0^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)}] \right) &\mapsto [f_0(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r_k-1}^{(1)}, a_{r_k}^{(k)}), \dots \\ &\quad \dots, f_N(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r_k-1}^{(1)}, a_{r_k}^{(k)})] \end{aligned}$$

è ben definita e $\text{Im } \psi$ ha per chiusura una varietà. In più, considerando il morfismo di anelli

$$\begin{aligned} \phi : K[z_0, \dots, z_N] &\rightarrow K[a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r_k-1}^{(1)}, a_{r_k}^{(k)}] \\ p(z_0, \dots, z_N) &\mapsto p(f_0(a_1^{(1)}, \dots, a_{r_k}^{(k)}), \dots, f_N(a_1^{(1)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})) \end{aligned}$$

si ha che $\overline{\text{Im } \psi} = V(\text{Ker } \phi)$.

Dimostrazione. Se gli f_j sono tutti costanti $\text{Im } \psi$ è un punto $\{[b_1, \dots, b_N]\}$, che è una varietà. Il $\text{Ker } \phi$ coincide chiaramente con $I(\text{Im } \psi)$ (per definizione è l'insieme dei polinomi che si annullano su $[b_1, \dots, b_N]$) e quindi non c'è niente da dimostrare.

Altrimenti almeno uno dei d_j è diverso da 0.

Per brevità indichiamo con $A = (a_0^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}, \dots, a_0^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$.

La buona definizione è garantita dall'omogeneità dei polinomi f_0, \dots, f_N .

Basta pensare che preso $M_i \in K^*$ se i polinomi sono di grado d_i nel gruppo di variabili $a^{(i)}$

$$\begin{aligned} [M_1 a_0^{(1)}, \dots, M_1 a_{r_1}^{(1)}], \dots, [M_k a_0^{(k)}, \dots, M_k a_{r_k}^{(k)}] &\mapsto \\ [M_1^{d_1} \dots M_k^{d_k} f_0(A), \dots, M_1^{d_1} \dots M_k^{d_k} f_N(A)] &= [f_0(A), \dots, f_N(A)] \end{aligned}$$

e in virtù dell'ipotesi che gli f_j non abbiano zeri comuni, gli $f_j(A)$ non sono tutti nulli.

Per la seconda parte, si considera la mappa ϕ e si osserva che $\text{Ker } \phi$ è omogeneo. Infatti se gli f_j sono omogenei in ciascun gruppo di variabili, sono anche omogenei come polinomi in $K[a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r_k-1}^{(k)}, a_{r_k}^{(k)}]$ di grado $\sum_i d_i \neq 0$. Pertanto possiamo applicare il corollario 2.2.2.

Mostriamo quindi che $\overline{\text{Im } \psi} = V(\text{Ker } \phi)$. Cominciamo a provare $\text{Im } \psi \subseteq V(\text{Ker } \phi)$

Sia $P \in \text{Im } \psi$, allora $P = [f_0(A), \dots, f_N(A)]$. Sia $g \in \text{Ker } \phi$; si ha:

$$g(f_0(A), \dots, f_N(A)) = 0$$

Pertanto $\text{Im } \psi \subseteq V(\text{Ker } \phi)$.

Per provare l'inclusione inversa proviamo $I(\text{Im } \psi) \subseteq \text{Ker } \phi$ e poi possiamo applicare V alla disuguaglianza per avere $V(\text{Ker } \phi) \subseteq \overline{\text{Im } \psi}$.

Prendiamo $g \in I(\text{Im } \psi)$. Il generico punto di $\text{Im } \psi$ si scrive $P = [f_0(A), \dots, f_N(A)]$.

Pertanto vale:

$$0 = g(f_0(A), \dots, f_N(A)) = \phi(g)(A)$$

Per ogni $A = (a_0^{(1)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$ tale che $(a_0^{(j)}, \dots, a_{r_j}^{(j)}) \neq (0, \dots, 0) \quad \forall j = 1, \dots, k$.

Allora $\phi(g) = 0$.

Infatti si può pensare che $\phi(g)$ su $\mathbb{A}^{r_1+\dots+r_k+k}$ si annulla dappertutto meno l'unione per $j = 1, \dots, k$ dei chiusi $a_1^{(j)} = \dots = a_{r_j}^{(j)} = 0$, quindi su un aperto. Essendo $\mathbb{A}^{r_1+\dots+r_k+k}$ irriducibile, i suoi aperti sono densi. Siccome i polinomi sono mappe continue su $\mathbb{A}^{r_1+\dots+r_k+k}$, se $\phi(g)$ su un aperto denso è 0, lo è dappertutto. Quindi $\phi(g) = 0$, cioè $g \in \text{Ker } \phi$. Ora resta da provare che $\text{Ker } \phi$ è primo.

Ma essendo ϕ un omomorfismo di anelli con immagine un sottoanello di un dominio, questo è vero in virtù del primo teorema di omomorfismo. \square

Nel seguito sfrutteremo questo risultato per introdurre alcuni degli esempi più classici di varietà proiettive.

4.2 La varietà di Segre

Proposizione-Definizione 4.2.1

Presi $r, s \in \mathbb{N}, r, s \geq 1$ consideriamo $\{a_i b_j, i = 0, \dots, r; j = 0, \dots, s\}$ ordinati con l'ordine lessicografico. L'immersione di Segre:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ ([a_0, \dots, a_r], [b_0, \dots, b_s]) &\longmapsto [a_0 b_0, a_0 b_1, \dots, a_r b_s] \end{aligned}$$

dove $N = (r+1)(s+1) - 1$ ha per immagine una varietà che si chiama varietà di Segre e denoteremo con $\Sigma_{r,s}$.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.1.2 applicata a $f_0 = a_0 b_0, \dots, f_N = a_r b_s$, abbiamo già che ψ è ben definita e la sua immagine ha per chiusura una varietà. Resta da vedere che la sua immagine sia chiusa (cioè coincida con la sua chiusura).

Diciamo ϕ la mappa come nella 4.1.2, e indichiamo per comodità le variabili di \mathbb{P}^N con due indici e l'ordine lessicografico sugli indici:

$$\begin{aligned} \phi : K[z_{00}, z_{01}, \dots, z_{rs}] &\rightarrow K[a_0, \dots, a_r, b_0, \dots, b_s] \\ p(z_{00}, \dots, z_{rs}) &\mapsto p(a_0 b_0, \dots, a_r b_s) \end{aligned}$$

Chiaramente i polinomi del tipo $z_{ij} z_{km} - z_{im} z_{kj}$ sono tali che:

$$\phi(z_{ij} z_{km} - z_{im} z_{kj}) = a_i b_j a_k b_m - a_i b_m a_k b_j = 0$$

Pertanto l'intersezione delle quadriche $V(z_{ij} z_{km} - z_{im} z_{kj})$ contiene $\text{Im } \psi$, poichè l'ideale generato dai polinomi $z_{ij} z_{km} - z_{im} z_{kj}$ è contenuto in $\text{Ker } \phi$ e quindi si ha:

$$\begin{aligned} (\{z_{ij} z_{km} - z_{im} z_{kj}\}_{i,k=0,\dots,r; j,m=0,\dots,s}) &\subseteq \text{Ker } \phi \implies \\ \text{Im } \psi &\subseteq V(\text{Ker } \phi) \subseteq \bigcap_{\substack{i,k=0,\dots,r \\ j,m=0,\dots,s}} V(z_{ij} z_{km} - z_{im} z_{kj}) \end{aligned}$$

Mostriamo che $\text{Im } \psi$ contiene l'intersezione delle quadriche $V(z_{ij}z_{km} - z_{im}z_{kj})$:

Se $P = [z_{00}, \dots, z_{rs}] \in \bigcap_{\substack{i,k=0,\dots,r \\ j,m=0,\dots,s}} V(z_{ij}z_{km} - z_{im}z_{kj})$ allora

$$z_{ij}z_{km} = z_{im}z_{kj} \quad \forall i, k = 0, \dots, r; j, m = 0, \dots, s$$

Sia $z_{i\bar{j}} \neq 0$.

Riscrivendo le coordinate omogenee possiamo avere che $z_{i\bar{j}} = 1$.

Allora vale che

$$z_{km} = z_{i\bar{j}}z_{km} = z_{im}z_{k\bar{j}}$$

Pertanto ponendo $a_k = z_{k\bar{j}}$ e $b_m = z_{im}$, si ha che:

$$\psi([a_0, \dots, a_r], [b_0, \dots, b_s]) = [a_0b_0, \dots, a_rb_s] = [z_{00}, \dots, z_{rs}] = P$$

□

L'applicazione ψ della proposizione 4.2.1 è iniettiva, come si vede in proposizione 4.2.2, e dà quindi una biezione tra $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ e la varietà di Segre $\Sigma_{r,s}$.

Proposizione 4.2.2

Nelle notazioni di 4.2.1, ψ è iniettiva

Dimostrazione. Supponiamo che si abbia:

$$\psi([a_0, \dots, a_r], [b_0, \dots, b_s]) = \psi([c_0, \dots, c_r], [d_0, \dots, d_s])$$

allora $[a_0b_0, \dots, a_rb_s] = [c_0d_0, \dots, c_rd_s]$ cioè $\exists M \in K^*$ tale che

$$a_ib_j = Mc_id_j \quad \forall i = 0, \dots, r; j = 0, \dots, s$$

Ma poichè esistono \bar{i}, \bar{j} per cui $a_{\bar{i}}b_{\bar{j}} \neq 0$ allora vale che $c_{\bar{i}}d_{\bar{j}} \neq 0$.

Pertanto possiamo supporre (al più cambiando rappresentante per le coordinate omogenee) che $b_{\bar{j}} = 1 = d_{\bar{j}}$.

Pertanto

$$a_ib_j = Mc_id_j \quad \forall i = 0, \dots, r; j = 0, \dots, s \implies$$

$$a_i = a_ib_{\bar{j}} = Mc_id_{\bar{j}} = Mc_i \quad \forall i = 0, \dots, r \implies$$

$$[a_0, \dots, a_r] = [c_0, \dots, c_r]$$

Analogamente si trova $[b_0, \dots, b_s] = [d_0, \dots, d_s]$.

□

4.3 La varietà di Veronese

Proposizione-Definizione 4.3.1

Fissati $n, d \in \mathbb{N}$, $n, d \geq 1$, e posto $N = \binom{n+d}{d} - 1$, consideriamo gli $N + 1$ monomi di grado d nelle variabili a_0, \dots, a_n , fissiamo un ordine su tali monomi, e denotiamoli con M_0, \dots, M_N .

Chiamiamo immersione di Veronese di \mathbb{P}^n in grado d la mappa

$$\begin{aligned} \rho_d : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ [a_0, \dots, a_n] &\longmapsto [M_0(a_0, \dots, a_n), \dots, M_N(a_0, \dots, a_n)] \end{aligned}$$

Questa è ben definita, iniettiva e continua, e la sua immagine è una varietà detta varietà di Veronese e denotata con $V_{n,d}$.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.1.2, abbiamo che la ρ_d è ben definita e la chiusura della sua immagine è una varietà; da 3.3.1 segue la continuità. L'iniettività si vede così: se $\rho_d([a_0, \dots, a_n]) = \rho_d([b_0, \dots, b_n])$, sia $a_i \neq 0$, allora $a_i^d = b_i^d \neq 0 \implies b_i \neq 0$.

Possiamo supporre quindi $a_i = b_i = 1$ da cui per ogni $j = 0, \dots, n$

$$a_i^{d-1} a_j = b_i^{d-1} b_j \implies a_j = b_j$$

Dobbiamo provare che $\text{Im } \rho_d$ è chiusa. Per farlo, rietichettiamo le variabili di \mathbb{P}^N in questo modo:

consideriamo il multindice

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, \text{ con } \alpha_0 + \dots + \alpha_n = d$$

e poniamo

$$a^\alpha = a_0^{\alpha_0} \dots a_n^{\alpha_n}$$

Denotiamo poi con z_α la coordinata relativa al monomio a^α .

Il multindice corrispondente al monomio $a_k^{d-1} a_j$ ($j \neq k$), rispettivamente al monomio a_k^d , viene nel seguito denotato $\alpha(k, j)$, rispettivamente $\alpha(k)$ (o

$\alpha(k, k)$.

Possiamo osservare che su $\text{Im } \rho_d$ vale:

$$\begin{aligned} z_\beta z_{\alpha(k)}^{d-1} &= a^\beta (a^{\alpha(k)})^{d-1} = \left(\prod_{j=0}^n a_j^{\beta_j} \right) (a_k^d)^{d-1} = \left(\prod_{j=0}^n a_j^{\beta_j} \right) \left(\prod_{j=0}^n a_k^{\beta_j} \right)^{d-1} = \\ &= \prod_{j=0}^n a_j^{i_j} a_k^{\beta_j(d-1)} = \prod_{j=0}^n (a_j a_k^{(d-1)})^{\beta_j} = \prod_{j=0}^n z_{\alpha(k,j)}^{\beta_j} \end{aligned}$$

e anche

$$z_\beta^d = \left(\prod_{j=0}^n a_j^{\beta_j} \right)^d = \prod_{j=0}^n a_j^{\beta_j d} = \prod_{j=0}^n (a_j^d)^{\beta_j} = \prod_{j=0}^n (z_{\alpha(j)})^{\beta_j}$$

Allora i polinomi del tipo $z_\beta z_{\alpha(k)}^{d-1} - \prod_{j=0}^n z_{\alpha(k,j)}^{\beta_j}$ e $z_\beta^d - \prod_{j=0}^n (z_{\alpha(j)})^{\beta_j}$ si annullano su $\text{Im } \rho_d$.

Notiamo che poichè i multindici β sono in numero finito, e così gli interi $k \in \{0, \dots, n\}$, anche questi polinomi sono in numero finito.

Se consideriamo l'intersezione delle varietà associate a questi polinomi,

$$Z = \bigcap V(z_\beta z_{\alpha(k)}^{d-1} - \prod_{j=0}^n z_{\alpha(k,j)}^{\beta_j}) \cap \bigcap V(z_\beta^d - \prod_{j=0}^n (z_{\alpha(j)})^{\beta_j})$$

questa è un chiuso che contiene $\text{Im } \rho_d$.

Mostriamo ora che Z è contenuto in $\text{Im } \rho_d$. Sia $P = [\dots, z_\alpha, \dots] \in Z$.

Se $\forall k = 0, \dots, n$ si ha $z_{\alpha(k)} = 0$ allora, poichè P sta in $V(z_\beta^d - \prod_{j=0}^n (z_{\alpha(j)})^{\beta_j})$ per ogni β , si ha che

$$z_\beta^d = \prod_{j=0}^n (z_{\alpha(j)}^{\beta_j}) = 0 \implies z_\beta = 0$$

Ma allora avremmo che P ha coordinate $[0, \dots, 0]$, il che è assurdo.

Pertanto esiste un k tra $0, \dots, n$ tale che $z_{\alpha(k)} \neq 0$, e possiamo quindi supporre sia $z_{\alpha(k)} = 1$.

Poichè P sta in $V(z_\beta z_{\alpha(k)}^{d-1} - \prod_{j=0}^n z_{\alpha(k,j)}^{\beta_j})$ si ha che

$$z_\beta = z_\beta z_{\alpha(k)}^{d-1} = \prod_{j=0}^n z_{\alpha(k,j)}^{\beta_j}$$

Da cui

$$P = \rho_d([z_{\alpha(k,0)}, \dots, z_{\alpha(k,n)}])$$

□

L'ultimo passaggio della dimostrazione precedente, essendo ρ_d iniettiva, ci ha fornito l'espressione di un'inversa locale della mappa di Veronese e pertanto possiamo provare che è anche un omeomorfismo tra \mathbb{P}^n e $\text{Im } \rho_d$.

Infatti possiamo sfruttare questo lemma:

Lemma 4.3.2

Siano X, Y spazi topologici, sia $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un ricoprimento aperto di X .

Siano $\eta_i : A_i \rightarrow Y$ mappe continue che coincidano sulle intersezioni degli A_i , cioè tali che: $\eta_i|_{A_i \cap A_j} = \eta_j|_{A_i \cap A_j} \forall i, j \in \mathcal{I}$.

Allora la mappa

$$\begin{aligned} \eta : X &\longrightarrow Y \\ x \in A_i &\longmapsto \eta_i(x) \end{aligned}$$

è continua

Dimostrazione. Sia B aperto di Y , allora

$$\eta^{-1}(B) = \eta^{-1}(B) \cap \left(\bigcup A_i \right) = \bigcup (\eta^{-1}(B) \cap A_i) = \bigcup \eta_i^{-1}(B)$$

che essendo unione di aperti è aperto. □

"Incollando" le espressioni locali dell'inversa, otteniamo che:

Proposizione 4.3.3

La mappa di Veronese è un omeomorfismo di \mathbb{P}^n sulla varietà di Veronese

Dimostrazione. Dalla dimostrazione precedente, abbiamo provato che sugli aperti della varietà tali che $z_{\alpha(k)} \neq 0$ la mappa $P \mapsto [z_{\alpha(k,0)}, \dots, z_{\alpha(k,n)}]$ è un'inversa di ρ_d . Ma questa è la restrizione a $V_{n,d} \setminus V(z_{\alpha(k)})$ della mappa definita su $\mathbb{P}^N \setminus \bigcap_j V(z_{\alpha(k,j)})$ che manda un punto $Q = [\dots, z_{\alpha}, \dots] \in \mathbb{P}^N \setminus \bigcap_j V(z_{\alpha(k,j)})$ in $[z_{\alpha(k,0)}, \dots, z_{\alpha(k,n)}]$. Questa rispetta le ipotesi di 3.3.1 quindi è continua su

$\mathbb{P}^N \setminus \bigcap_j V(z_{\alpha(k,j)}) \supseteq \mathbb{P}^N \setminus V(z_{\alpha(k)})$, pertanto è continua anche la sua restrizione a $V_{n,d} \setminus V(z_{\alpha(k)})$. Notiamo che se esistono due $k \neq s$ tali che $z_{\alpha(k)} \neq 0 \neq z_{\alpha(s)}$, i punti $[z_{\alpha(k,0)}, \dots, z_{\alpha(k,n)}]$ e $[z_{\alpha(s,0)}, \dots, z_{\alpha(s,n)}]$ coincidono.

Cioè, vale che se P appartiene a due aperti $z_{\alpha(k)} \neq 0$ e $z_{\alpha(s)} \neq 0$ abbiamo che le due immagini del punto mediante le due mappe coincidono.

Infatti, sfruttando le relazioni sulla varietà trovate nella dimostrazione precedente ($z_\beta^d - \prod_{j=0}^n (z_{\alpha(j)})^{\beta_j} = 0$):

$$z_{\alpha(k,s)}^d = z_{\alpha(k)}^{d-1} z_{\alpha(s)} \neq 0 \implies z_{\alpha(k,s)} \neq 0$$

da cui usando che sulla varietà $z_\beta z_{\alpha(k)}^{d-1} - \prod_{j=0}^n z_{\alpha(k,j)}^{\beta_j}$:

$$z_{\alpha(s,j)} z_{\alpha(k)}^{d-1} = z_{\alpha(k,s)}^{d-1} z_{\alpha(k,j)} \implies z_{\alpha(s,j)} = \frac{z_{\alpha(k,s)}^{d-1}}{z_{\alpha(k)}^{d-1}} z_{\alpha(k,j)}$$

abbiamo che

$$[z_{\alpha(k,0)}, \dots, z_{\alpha(k,n)}] = \left[\frac{z_{\alpha(k,s)}^{d-1}}{z_{\alpha(k)}^{d-1}} z_{\alpha(k,0)}, \dots, \frac{z_{\alpha(k,s)}^{d-1}}{z_{\alpha(k)}^{d-1}} z_{\alpha(k,n)} \right] = [z_{\alpha(s,0)}, \dots, z_{\alpha(s,n)}]$$

Pertanto mediante il lemma di incollamento 4.3.2 l'associazione

$$P \mapsto [z_{\alpha(k,0)}, \dots, z_{\alpha(k,n)}], k \text{ t.c. } z_{\alpha(k)} \neq 0$$

è una funzione continua definita su tutta $\text{Im } \rho_d$ e ne è l'inversa.

Quindi ρ_d è omeomorfismo. □

4.4 La cubica gobba di \mathbb{P}^3

Nel seguito indicheremo le coordinate omogenee di \mathbb{P}^3 con $[x, y, z, w]$. Tra le varietà di Veronese, la più semplice è l'immersione di \mathbb{P}^1 in \mathbb{P}^3 .

Definizione 4.4.1

Si dice cubica gobba \mathcal{C} di \mathbb{P}^3 la varietà di Veronese $V_{1,3}$

Quindi $\mathcal{C} = \rho_3(\mathbb{P}^1)$, dove

$$\begin{aligned} \rho_3 : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [s, t] &\longmapsto [s^3, s^2t, st^2, t^3] \end{aligned}$$

Tra le varietà di Segre la più semplice è la $\Sigma_{1,1}$ cioè l'immersione di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [a_0, a_1], [b_0, b_1] &\longmapsto [a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1] \end{aligned}$$

La $\Sigma_{1,1}$ è quindi la quadrica di \mathbb{P}^3 di equazione $xw - yz = 0$

Proposizione 4.4.2

Date le quadriche di \mathbb{P}^3

$$Q_1 : yz - xw = 0$$

$$Q_2 : xz - y^2 = 0$$

l'intersezione $Q_1 \cap Q_2$ è unione di una retta e della cubica gobba \mathcal{C} .

Dimostrazione. Sia $P = [x, y, z, w] \in Q_1 \cap Q_2$. Impostando il sistema:

$$\begin{cases} yz - xw = 0 \\ xz - y^2 = 0 \end{cases}$$

abbiamo:

se $x = 0$

$$\begin{cases} yz - xw = 0 \\ xz - y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 0 \\ yz = 0 \end{cases} \iff y = 0 \iff y = 0$$

Pertanto se $x = 0$ allora $P \in V(y, x)$ che è una retta che chiameremo L .

Altrimenti, se $x \neq 0$:

$$\begin{cases} yz - xw = 0 \\ xz - y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{y^2}{x} \\ w = \frac{yz}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{y^2}{x} \\ w = \frac{y^3}{x^2} \end{cases}$$

Allora possiamo parametrizzare prendendo $a \in K, b \in K^*$ e avere:

$$\begin{cases} y = a \\ x = b \\ z = \frac{a^2}{b} \\ w = \frac{a^3}{b^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = ab^2 \\ x = b^3 \\ z = a^2b \\ w = a^3 \end{cases}$$

Cioè P sta nella cubica gobba \mathcal{C} .

Dai se e solo se nelle dimostrazioni si ha anche che i punti di L sono nell'intersezione, come anche i punti di \mathcal{C} con $x \neq 0$.

D'altra parte, l'unico punto di \mathcal{C} con $x = 0$ è $[0, 1, 0, 0]$ che però sta in L e quindi in $Q_1 \cap Q_2$ \square

Osservazione 4.4.3. La proposizione 4.4.2 ci mostra due varietà Q_1 e Q_2 (sono quadriche associate agli ideali $(x^2 - yw)$ e $(xy - zw)$, generati ciascuno da un polinomio irriducibile) che hanno come intersezione l'unione di altre due varietà (cioè L e \mathcal{C}). In particolare quindi $Q_1 \cap Q_2$ è unione di insiemi algebrici non uno contenuto nell'altro e pertanto è riducibile, quindi non è una varietà.

Bibliografia

- [1] M.F.Atiyah-I.G.MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*
- [2] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento va certamente alla Professoressa Idà: un grazie sincero per le indicazioni, le correzioni, i consigli, e soprattutto per la disponibilità e per il clima di dialogo che ha permesso si creasse.

Grazie poi alla mia famiglia per il contesto straordinariamente positivo che mi ha costruito attorno. In particolare ai miei genitori, mio fratello e mia nonna che per tanti pomeriggi hanno sopportato i miei lunghi sfoghi, matematici o meno.

Non posso poi non dedicare un pensiero alle persone incredibili che ho incontrato nelle aule di questo dipartimento. Grazie ai compagni di studio che si sono sempre messi in gioco, discutendo di matematica e condividendo spunti, dubbi e idee.

Un grazie poi a coloro che da compagni di corso sono diventati molto di più, e con cui ho riempito di esperienze, scoperte e vita questi anni.

Grazie davvero per aver mantenuto in me un po' di contatto con la realtà impedendomi di perdermi nelle idee astratte che studiamo tutti i giorni.

Senza di voi non credo proprio che sarei arrivato in fondo così come sono oggi.